3Д

УДК 681.142.2/518.3

П.Н. Денисенко
Кировоградский учебно-научный педагогический комплекс МОН Украины,
г. Кировоград, Украина
pnden_osvita@yahoo.com

Алгоритм для решения нелинейных краевых задач по τ-методу Ланцоша в системах компьютерной алгебры

Построен алгебраический алгоритм для преобразования многоточечной линейной краевой задачи для дифференциального уравнения порядка k с линейной частью – линейный дифференциальный оператор многочленными коэффициентами порядка k и нелинейной частью – функция $f(y, y',..., y^{(k-1)})$ в алгебраический многочлен порядка $n \in N$. Этот многочлен – аппроксимация решения $y(x)$, $x \in [a,b]$ исходной краевой задачи. Эта аппроксимация оптимальна в пространстве $C^k_{[a,b]}$.

Введение

Актуальность темы исследования. Многоточечные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений являются классическим аппаратом математического моделирования [1]. Maple, Mathematica, Mathcad, Matlab и другие системы компьютерной алгебры (СКА) – системы символьных вычислений на компьютерах – стали естественной средой математического моделирования.

СКА для обыкновенных дифференциальных уравнений символьно вычисляют:

– решение – композицию специальных математических функций (существует редко),

– частную сумму ряда Тейлора решения задачи Коши порядка n. Обычно $n < 10$. Этот алгебраический многочлен, как правило, не удовлетворяет основной критерий эффективности математических моделей – *точность*.

Возможности классического математического обеспечения ЭВМ. Компьютерные системы типа Matlab вычисляют сеточную аппроксимацию решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений по численным методам. Это методы, как правило, с насыщением. Производные сеточной функции, как правило, являются не оптимальным аппаратом аппроксимации производных исходной функции.

Цель работы. Построить алгебраический алгоритм для вычисления в СКА аппроксимации на отрезке $[a,b]$ решения многоточечных линейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k следующего вида

$$D[y] = f(y, y',..., y^{(k-1)}), \qquad D[y] = A\ y^{(k)} + \ldots + C\,y, \tag{1}$$

$$Cond(y) = \{\ D_i[y]\,|_{x = d_i} + G_i = 0\ \}_{i=1}^{k}, \quad D_i[y] = A_i\,y^{(k_i)} + \ldots + C_i\,y. \tag{2}$$

Коэффициенты $A,...,C$ линейного оператора $D[y]$ (1) – алгебраические многочлены. Точки задания краевых условий (2) принадлежат отрезку $[a,b]$ – $d_i \in [a,b]$, $i = 1, \ldots, k$ и являются регулярными не особыми точками оператора $D[y]$ – $A(d_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$.

По этому алгоритму в СКА вычисляют алгебраический многочлен y_n порядка $n \in N$

$$y_n = c_0 + c_1\, x + \ldots + c_n\, x^n = algorithm_1((1), (2), [a,b], n). \qquad (3)$$

Многочлен y_n (3) аппроксимирует решение $y = solve(\ (1), (2)\ )$, $y = y(x)$, $x \in [a,b]$ краевой задачи (1), (2). Эта аппроксимация оптимальна для преобразований в СКА решения y задачи (1), (2) и его производных $y', \ldots, y^{(k)}$ на отрезке $[a,b]$ – коэффициент оптимальности алгоритма на краевой задаче (1), (2) в пространстве $C^k_{[a,b]}$ ограничен $C_n(algorithm_1, (1), (2), C^k_{[a,b]}) = \| y - y_n \|_X / \inf_{c_0,\ldots,c_n} \| y(x) - (c_0 + c_1\, x + \ldots + c_n\, x^n) \|_X < \infty$.

Актуальность задачи. Уравнения вида (1) применяются в математических моделях более часто, чем дифференциальные уравнения других типов. Если процесс моделируют дифференциальным уравнением порядка k, то, часто, на отрезке $[a,b]$ исследуют решение $y = y(x)$ этого уравнения и его производные $y', \ldots, y^{(k)}$ – преобразуют эти функции на отрезке $[a,b]$.

1. Композиция итерации, τ-метода и интерполяции

Алгоритм 1.

Вход: Уравнение (1), условия (2), отрезок $[a,b]$, параметр n.

Выход: Алгебраический многочлен (3) (порядка n).

Преобразования:

1. Вычислить начальное приближение к решению краевой задачи (1), (2) – многочлен порядка $k - 1$, удовлетворяющий краевые условия (2)

$$y_{n,0} = y_{k-1} = solve(\ Cond(\ y_{k-1} \in P_{k-1}\ )\ ). \qquad (4)$$

2. Для $s = 1, 2, \ldots$ выполнить:

2.1. Вычислить производные $y'_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}$ многочлена $y_{n,s-1}$.

2.2. Преобразовать функцией f (1) многочлен $y_{n,s-1}$ и его производные в функцию

$$f_s = f_s(x) = f(x, y_{n,s-1}, \ldots, y^{(k-1)}_{n,s-1}. \qquad (5)$$

2.3. Вычислить алгебраический многочлен

$$F_s = U_n[f_s] = U_n[\{ f_s(\ a + (b - a)\ (1 - \cos(i\ \pi\ /n\ ))/2), \quad i = 0, \ldots, n\}] - \qquad (6)$$

интерполяцию функции f_s (5) в узлах Чебышева на отрезке $[a,b]$ [2, с. 94].

2.4. Вычислить линейное дифференциальное уравнение с многочленными коэффициентами (ЛДУМК)

$$D[y] = F_s. \qquad (7)$$

2.5. Решить по алгоритму [3] τ-метода Ланцоша [1] с параметром n краевую задачу (2) для ЛДУМК (7) на отрезке $[a,b]$ и вычислить аппроксимацию точного решения краевой задачи (7), (2) – $y(s,x) = solve(\ (7), (2)\ )$ – алгебраический многочлен порядка n

$$y_{n,s} = algorithm_[3](\ D[y] = F_s, Cond(y), [a,b], n\ ). \qquad (8)$$

3. Вычислить искомую аппроксимацию (3) решения y краевой задачи (1), (2) – предел последовательности многочленов (8) при $s \to \infty$

$$y_n = algorithm_1\ (\ (1), (2), [a,b], n\ ) = \lim_{s \to \infty} y_{n,s}.$$

2. Оптимальность алгоритма 1 на модельной задаче

Модельная краевая задача метода квазилинеаризации [4]

$$y'' = \exp(y),\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \tag{9}$$

Эта задача является одномерным аналогом уравнения гидродинамики $y''_{x,x} + y''_{t,t} = \exp(y)$ и имеет единственное решение – функцию аналитическую в окрестности отрезка [0,1] комплексной плоскости

$$y = -\ln(2) + 2\ln(c\sec(c\,(x - 1/2)/2),\ c = solve(\mathrm{sqrt}(2) = c\sec(c/4)). \tag{10}$$

Свойства функции y (10). Отличные от нуля коэффициенты Фурье – Чебышева функций y, y'' (10) на отрезке [0,1] только четные и принимают следующие значения

$$\{\ a_{2i}(y, [0,1])\ \}_{i=0}^{9} = \{ -0.057,\ 0.057,\ 0.00027,\ 2.1\ 10^{-6},\ 1.8\ 10^{-8},$$
$$1.66\ 10^{-10},\ 1.6\ 10^{\wedge-12},\ 1.6\ 10^{-14},\ 1.6\ 10^{-16},\ 2.1\ 10^{-18} \},$$
$$\{\ a_{2i}(y'', [0,1])\ \}_{i=0}^{10} = \{ 0.94,\ 0.053,\ 0.001,\ 1.6\ 10^{-5},\ 2.4\ 10^{-7},$$
$$3.5\ 10^{-9},\ 4.7\ 10^{-11},\ 6.3\ 10^{-13},\ 8.2\ 10^{-15},\ 8.8\ 10^{-17},\ -5.5\ 10^{-18} \}. \tag{11}$$

С ростом параметра $n = 2\,i$ они регулярно убывают к нулю

$$|a_{2i+2}(y, [0,1])| / |a_{2i}(y, [0,1])| = \gamma_{1,2i},\ \gamma_{1,0} = 1,\ \gamma_{1,2} = 0.005,\ \gamma_{1,4} = 0.007,\ \ldots,\ \gamma_{1,14} = 0.01,$$
$$|a_{2i+2}(y'', [0,1])| / |a_{2i}(y'', [0,1])| = \gamma_{2,2i},\ \gamma_{2,0} = 0.06,\ \gamma_{2,2} = 0.2,\ \gamma_{2,4} = 0.016,\ \ldots,\ \gamma_{2,16} = 0.01.$$

Следовательно, для величины наилучшего приближения функции y (10) алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[0,1]}$ и $C^2_{[0,1]}$ справедливы тождества

$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n)\ \|_{C[0,1]} = (1 + \beta_n)\ |\ a_{2[n/2]+2}(y, [0,1])\ |,$$
$$\inf_{c_0,\ldots,c_n} \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_n x^n)\ \|_{C:2_[0,1]} = (1 + \gamma_n)\ |\ a_{2[n/2]}(y'', [0,1])\ |, \tag{12}$$

где $n > 1 \to |\ \beta_n\ | \le \beta \approx 0.01$, $n > 2 \to |\ \gamma_n\ | \le \gamma \approx 0.01$.

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. Норма погрешности решения краевой задачи (9) по алгоритму 1 в пространстве $C_{[0,1]}$ и $C^2_{[0,1]}$ удовлетворяет тождества

$$\{\ \|\ y - y_{2i}\ \|_{C[0,1]}\ \}_{i=1}^{5} = \{ 0.0043,\ 2.5\ 10^{-5},\ 1.2\ 10^{-7},\ 1.1\ 10^{-9},\ 6.7\ 10^{-11} \},$$
$$\{\ \|\ y - y_{2i}\ \|_{C^\wedge2_[0,1]}\ \}_{i=1}^{5} = \{ 0.056,\ 0.001,\ 1.7\ 10^{-5},\ 2.5\ 10^{-7},\ 3.6\ 10^{-9} \}.$$

Из тождеств (11) и (12) можно сделать следующее заключение.

Вывод 1. *Главной частью коэффициента оптимальности решения по алгоритму 1 краевой задачи* (9) *в пространствах* $C_{[0,1]}$ и $C^2_{[0,1]}$ *являются отношения*

$$\{\ \|\ y - y_n\ \|_{C[0,1]} /\ |\ a_{2[n/2]+2}(y, [0,1])\ | = C_{2[n/2]},\ \{\ C_{2i}\ \}_{i=1}^{4} = \{ 16, 12, 7, 6 \},$$
$$\|y - y_n\|_{C^\wedge2_[0,1]}/|a_{2[n/2]}(y'',[0,1])| = 1 + \alpha_{2[n/2]},\ \{\alpha_{2i}\}_{i=1}^{4} = \{0.06, 0.000006, 0.05, 0.04\}. \tag{13}$$

Согласно определению, коэффициент оптимальности метода вычисления алгебраического многочлена, аппроксимирующего решение задачи (1), (2), не меньше единицы. Поэтому из этих тождеств и тождеств (12) можно сделать следующее заключение.

Вывод 2. *Главная часть коэффициента оптимальности алгоритма 1 на задаче* (9):

– *в пространстве* $C_{[0,1]}$ *ограничена и справедливо тождество*

$$C_n(\ algorithm_1, (9), C_{[0,1]}\ ) = (1 + \beta_n)\ C_{2[n/2]},$$

– *в пространстве* $C^2_{[0,1]}$ *асимптотически тождественна минимальному значению коэффициента оптимальности и справедливо тождество*

$$C_n(\ algorithm_1, (9), C^2_{[0,1]}\ ) = (1 + \gamma_n)\ (1 + \alpha_{2[n/2]}\ ).$$

3. Алгоритм 1 и метод квазилинеаризации

Метод квазилинеаризации [4]. По этому методу решают двухточечные краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, разрешенных относительно старшей производной (*task*) с точками задания краевых условий a и b (типа задачи (9)) на отрезке $[a,b]$, и вычисляют сеточную функцию с $q + 1$ равноотстоящими узлами сетки

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ \ldots,\ x_q = b,\ \ h = (b - a)/q,$$
$$y_h = \{\, y_h(x_i)\}_{i=0}{}^{q} = \{\, y_h\,(x_i,\ task\,)\}_{i=0}{}^{q} = method[4](\ task,\ [a,b],\ q) \approx \{\, y(x_i)\}_{i=0}{}^{q}.$$

Композиция метода квазилинеаризации и интерполяции алгебраическим многочленом сеточной функции y_h (вычисленной по методу квазилинеаризации) является методом вычисления алгебраического многочлена порядка q

$$P_q[\, y_h\,] = P_q[method[4](\ task,\ [a,b],\ q)],\ \ h = (b - a)/q. \tag{14}$$

Этот многочлен аппроксимирует решение y исходной задачи *task* на отрезке $[a,b]$. Норма погрешности метода (14) в пространстве $C_{[a,b]}$ не меньше соответствующей сеточной нормы. Сеточная норма погрешности метода (14) тождественна сеточной норме погрешности метода квазилинеаризации

$$\max_{x\,\in\,[a,b]}\,|\; y - P_q[y_h]\;| \ge \max_{i=0,\ldots,q}|\;(y - P_q[y_h])\;|_{x=x_i}\;| = \max_{i=0,\ldots,q}|\; y(x_i) - y_h(x_i\;)|.$$

Следовательно, коэффициент оптимальности метода (14) в пространстве $X = C_{[a,b]}$ не меньше

$$C_q(\ P_q[y_h],\ task,\ C_{[a,b]}\ ) \ge \max_{i=0,\ldots,q}|\; y(x_i) - y_h(x_i)\;|\;/\;\inf_{c_0,\ldots,c_q}\|\; y(x) - (c_0 + \ldots + c_q\,x^q)\;\|_{C[a,b]}.$$

Сравнение алгоритма 1 с методом $P_q[y_h]$ (14). На краевой задаче (9), согласно [4, с. 42], метод квазилинеаризации с параметром $q = 10$ имеет погрешность $3\ 10^{-7}$. Поэтому из тождеств (11) – (13) можно сделать следующее заключение.

Вывод 3. *Главная часть коэффициента оптимальности в пространстве* $C_{[0,1]}$ *метода алгебраической интерполяции сеточного решения метода квазилинеаризации* (14) *на краевой задаче* (9) *более чем в* 100 000 *раз больше* $1 + \alpha_{2\,[n/2]}$ (13) *– главной части коэффициента оптимальности алгоритма 1 на этой задаче*

$$C_{10}(\ P_{10}[y_{h=1/10}]\ ,\ \ task\ (9)\ ,\ \ C_{[0,1]}\ ) \ge 3\ 10^{-7}/\ 1.6\ 10^{-12} > 10^5.$$

4. Алгоритм 1 и методы с насыщением

Метод квазилинеаризации и другие сеточные методы решения функциональных уравнений, как правило, являются методами с насыщением. Скорость убывания с ростом числа узлов погрешностей решения по методу с насыщением краевой задачи с решением – аналитической функцией полиномиальная

$$\max_{i=0,\ldots,q}|\; y(x_i) - y_h(x_i)| = O(q^{-p}),\ \ \ h = (b - a)\;/\;q,\ \ \ p = p(method) = Const.$$

Скорость убывания (с возрастанием параметра n) величины наилучшего приближения функции y (10) алгебраическими многочленами порядка n в пространствах $C_{[0,1]}$ и $C^2{}_{[0,1]}$ оценивают тождества (11). Поэтому коэффициент оптимальности метода (14) и других методов интерполяции сеточного решения y_h многочленами возрастает с ростом числа узлов сетки q и скорость роста

$$C_q(\ P_q[y_h],\ task,\ C_{[0,1]}\ ) = O(z^q),\ \ z \ge 2.$$

Коэффициент оптимальности метода ряда Тейлора имеет такую же скорость роста. Из этих тождеств и вывода 1 можно сделать следующее заключение.

Вывод 4. *На краевой задаче (9) алгоритм 1 предпочтительнее метода (14) и метода ряда Тейлора, согласно критерию* – минимум коэффициента оптимальности.

5. Эквивалентный алгоритм метода Галеркина

Пусть для условий (2) существуют многочлен y_{k-1} (4) и линейный интегральный оператор

$$K[f] = solve(\, y^{(k)} = f,\ \{ D_i[\, y\,] \,|_{x = d_i} = 0 \}_{i=1}^{k}\,), \tag{15}$$

где $D_i[\, y\,]$ – линейные дифференциальные операторы условий (2). Тогда результат подстановки $y = K[\, u\,] + y_{k-1}$ в уравнении (1) является интегральным уравнением относительно функции u

$$D[\, K[\, u\,] + y_{k-1}\,] = f(\, K[\, u\,] + y_{k-1}, (\, K[\, u\,] + y_{k-1})', \ldots, (\, K[\, u\,] + y_{k-1})^{(k-1)}\,)\,]. \tag{16}$$

Для решения u уравнения (16) и решения y краевой задачи (1), (2) справедливо тождество

$$y = K[\, u\,] + y_{k-1}.$$

Метод 1.

1. Преобразовать краевую задачу (1), (2) в интегральное уравнение (16).

2. Вычислить аппроксимацию уравнения (16) по методу Галеркина с оператором проектирования S_p: $L_2(a,b;\rho) \to H_p[a,b]$ (вычисляет частную сумму порядка $p = n - k$, где k – порядок уравнения (1), ряда Фурье – Чебышева функции на отрезке $[a,b]$) и возмущением алгебраическим интерполированием правой части уравнения (16) по узлам Чебышева на отрезке $[a,b]$ – $U_n[\, f\,]$ (6)

$$S_p[D[\, K[\, u_p\,] + y_{k-1}\,]] = S_p[\, U_n[\, f(\, K[\, u_p\,] + y_{k-1}, \ldots, (K[\, u_p\,] + y_{k-1})^{(k-1)}\,)]]\ (u_p \in H_p[a,b]). \tag{17}$$

Неизвестным уравнения (17) является алгебраический многочлен u_p порядка $p = n - k$ вида – частная сумма ряда Чебышева на отрезке $[a,b]$ – $u_p \in H_p[a,b]$.

3. Решить уравнение (17) по методу простой итерации с начальным приближением $u_{p,0} = 0$. Следующие приближения являются решением уравнения

$$u_{p,s} = solve(\, S_p[\, D[\, K[\, u_p\,] + y_{k-1}\,] - F_s\,] = 0 \quad (u_p \in H_p[a,b]\,)\,), \tag{18}$$
$$F_s = U_n[\, f(\, K[\, u_{p,s-1}\,] + y_{k-1}, \ldots, (\, K[\, u_{p,s-1}\,] + y_{k-1}\,)^{(k-1)}\,)\,],\quad s = 1, 2, \ldots.$$

По этому методу вычисляют алгебраический многочлен $u_p = \lim_{s\to\infty} u_{p,s}$.

4. Преобразовать многочлен u_p в искомую аппроксимацию решения y задачи (1), (2)

$$y_n = K[\, u_p\,] + y_{k-1}.$$

Замечание 1. Уравнение (18) является аппроксимацией по методу Галеркина линейного интегрального уравнения с многочленными коэффициентами (ЛИУМК)

$$D[\, K[\, u\,] + y_{k-1}\,] = F_s. \tag{19}$$

Уравнение (19) является результатом подстановки $y = K[\, u\,] + y_{k-1}$ (введена в уравнении (16)) в ЛДУМК (7). Следовательно, метод 1 можно реализовать в виде следующего алгоритма.

Алгоритм 2. Алгоритм 1 со следующей модификацией п. 1 и п. 2.5.

1. Вычислить начальное приближение к решению уравнения (17) $u_{p,0} = 0$, оператор K (15) и многочлен (4) $y_{n,0} = y_{k-1}$ ($K[\, 0\,] = 0$).

2.5. Вычислить:

– ЛИУМК (19) – преобразовать краевую задачу для ЛДУМК (7), (2),

– решение $u_{p,s}$ (18) уравнения (19) по методу Галеркина,
– аппроксимацию решения задачи (7), (2) – преобразовать многочлен $u_{p,s}$ (18)

$$y_{n,s} = K[\ u_{p,s}\ ] + y_{k-1}. \qquad (20)$$

Теорема 1. *Пусть:*
– *для условий* (2) *существуют многочлен* $y_{k\text{-}1}$ (4) *и оператор* $K[\ u\ ]$ (15),
– *оператор* $K[\ u\ ]$ (15) *преобразует моном* x^i, $i \in N$ *в полином*

$$K[\ x^i\ ] = b_i\, x^{i+k} + \ldots + e_i,\ \ b_i \neq 0,$$

– *параметр алгоритма* 1 $n \geq 2\ k$, $k = ord_equ(\ D[\ y\ ]\ )$ – *порядок уравнения* (1).

Тогда алгоритм 1 *эквивалентен алгоритму* 2.

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то, согласно [3], многочлен $y_{n,s}$ (8) тождественен многочлену $y_{n,s}$ (20).

Остальные преобразования алгоритмов 1 и 2 тождественны.

6. Сходимость алгоритма 1

Из оценок оптимальности операторов S_n и U_n как аппарата аппроксимации функций на отрезке $[a,b]$ [2, с. 77-95]

$$\|\ y - S_n[\ y\ ]\ \|_{L_2(a,b;\,\rho)} = \inf\nolimits_{c_0,\ \ldots,\ c_n}\ \|\ y(x) - (c_0 + \ldots + c_n\, x^n)\ \|_{L_2(a,b;\,\rho)},$$
$$\|\ S_n\ \|_{L_2(a,b;\rho)} = 1,\ \ \|\ S_n\ \|_{C[a,b]} = (4/\pi^2)\ \ln(\ n\ ) + O(1),\ \ O(1) \leq 3,\ n > 0,$$
$$\|\ U_n\ \|_{C[a,b]} = (2/\pi)\ \ln(\ n\ ) + O(1),\ \ O(1) \leq 1,\ \ n > 0$$

можно сделать следующее заключение.

Вывод 5. *Результаты исследования метода Галеркина* [5] *решения операторных уравнений в пространстве Гильберта* $L_2(a,b;\ \rho)$ *на интегральных уравнениях вида* (16) *достаточно широкого класса доказывают:*
– *существование многочлена*

$$u_p = solve(\ (17)\ ),\ \ p \geq m,\ \ m = m(\ D[\ K[\ u\ ]\ ],\ f(x,y,y',\ \ldots,\ y^{(k\text{-}1)}\ )|_{y\ =\ K[\ u\ ]\ +\ yk\ -\ 1}\ ),$$

– *сходимость последовательности* $u_m,\ \ldots,\ u_p,\ u_{p+1},\ \ldots \to\ u\ = solve(\ (16)\ )$,
– *ограниченность коэффициента оптимальности метода* 1 (*и алгоритма* 2).

Поэтому из теоремы 1 *для краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений вида* (1), (2) *достаточно широкого класса следует:*
– *существование многочлена* y_n (3), $n \geq m+k$,
– *сходимость последовательности* $y_{m+k},\ \ldots,\ y_n,\ y_{n+1},\ \ldots \to\ y = solve(\ (1), (2)\ )$.

7. Апостериорные оценки погрешности

Теоретические оценки. Для алгоритма [3] известны точные и конструктивные апостериорные оценки нормы в пространстве $C_{[a,b]}$ и $C^k_{[a,\ b]}$ погрешности решения $y(s,\ x)$ краевой задачи для ЛДУМК (7), (2) – $\|\ y(s,x) - y_{n,s}(x)\ \|$. Если последовательность этих оценок ($s = 1, 2, \ldots$) сходится, то ее предел естественно принять за оценку погрешности алгоритма 1 на краевой задаче (1), (2).

Пример 1. (Иллюстрация эффективности теоретических оценок). Мы решили по алгоритму 1 краевую задачу (9) и тождественную задачу

$$y'' - y = \exp(y) - y,\ \ y(\ 0\ ) = 0,\ \ y(1) = 0. \qquad (21)$$

Начальное приближение $y_{n,0} = y_{k\text{-}1} = 0$. По алгоритму 1 для задачи (21) решают следующие краевые задачи для ЛДУМК

$$y'' - y = U_n[\ \exp(y_{n,s\text{-}1}) - y_{n,s\text{-}1}],\ \ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0,\ \ s = 1, 2, \ldots. \qquad (22)$$

Оценка [3] нормы в пространстве X погрешности решения по алгоритму [3] краевой задачи (22) на отрезке [0,1] с параметром n имеет вид

$$\| W_{2\,[n/2]+2}(x) \|_X \, | \tau(n, s) |, \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{23}$$

где $\tau(n,s) = \tau(2\,[n/2], s)$ – отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена решения задачи (22) по алгоритму [3],

$$\| W_{2\,i}(x) \|_{C\text{^}2_[0,1]} = 1, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Коэффициенты { τ(6,1), τ(6,2), …} оценки (23) принимают следующие значения

$$\{ 6\ 10^{-7},\ 1.7\ 10^{-5},\ 1.65326\ 10^{-5},\ 1.65277\ 10^{-5},\ldots, 1.65277\ 10^{-5},\ldots\}.$$

Последовательность $\tau(n, 1), \tau(n, 2), \ldots$ ($n \in N$) коэффициентов оценки (31) имеет предел $\tau(n) = \tau(2\,[n/2])$. Этот предел для задач (9) и (21) принимает следующие значения

$$\{ \tau(2),\ \tau(4),\ldots,\tau(10) \} = \{ 0.056,\ 0.001\ ,\ 1.7\ 10^{-5}\ ,\ 2.5\ 10^{-7}\ ,\ 3.5\ 10^{-9} \}.$$

Поэтому из оценок [3] и тождеств (11) – (13) можно сделать следующее заключение.

Вывод 6. *Предел оценок* [3] *погрешностей алгоритма* [3] *на краевой задаче для ЛДУМК* (7), (2) *при* $s \to \infty$ *является конструктивной оценкой погрешности алгоритма* 1 *на краевой задаче* (1), (2). *На краевой задаче* (9) *и* (21) *эта оценка точная.*

8. Априорные оценки погрешности

Теоретические оценки. Для решения краевой задачи для ЛДУМК (7), (2) по алгоритму [3] известны [3] точные и конструктивные априорные оценки нормы погрешности и коэффициента оптимальности в пространстве $C^k_{[a,\,b]}$. Этот коэффициент зависит от оператора $D[\ y\ ]$ (1) и операторов D_i (2). Если линейная часть (по y) функции f уравнения (1) мала, то коэффициент оптимальности решения краевой задачи для ЛДУМК (7), (2) по алгоритму [3] достаточно точно аппроксимирует коэффициент оптимальности решения краевой задачи (1), (2) по алгоритму 1.

Пример 2. (Иллюстрация эффективности теоретических оценок). Оценка [3] коэффициента оптимальности в пространстве $C^2_{[0,1]}$ решения по алгоритму [3] задачи (22) на отрезке [0,1] имеет вид

$$C_n(algorithm_[3], (22), C^2_{[0,\,1]}) \approx \| W''_{2\,i}(x) \|_{C[0,\,1]} \,/\, a_{2\,i}(W''_{2\,i}(\mathrm{x}), [0,1]), \tag{24}$$

где $i = [n/2]$. Мы вычислили составляющие правой части оценки (24) –

$$\| W''_{2\,i}(x) \|_{C[0,1]} = 1, \quad 1/a_{2\,i}(W''_{2\,i}(x), [0,1]) = 1 + \delta_{2\,i},$$

$$\{ \delta_{2\,i},\ i = 0, \ldots, 6 \} = \{ 0{,}06,\ 0{,}04,\ 0{,}008,\ 0{,}0036,\ 0{,}0022,\ 0{,}0013,\ 0{,}00087 \}.$$

Из этих тождеств и тождеств (13) можно сделать следующее заключение.

Вывод 7. В пространстве $C^2_{[0,\,1]}$ оценка (24) коэффициента оптимальности алгоритма [3] на краевой задаче для ЛДУМК (22) является эффективной оценкой коэффициента оптимальности (13) алгоритма 1 на краевых задачах (9) и (21).

9. Вычисление оценок погрешности

В работе [3] построены следующие алгоритмы для вычисления оценок погрешности решения краевых задач (2) для ЛДУМК (7) по алгоритму [3]:

– алгоритм 2 оценки нормы погрешности в пространстве $C^k_{[a,\,b]}$, …,

– алгоритм 3 оценки коэффициента оптимальности в пространстве $C^k_{[a,\,b]}$.

Для задачи (22) по этим алгоритмам с параметром q вычисляют многочлен

$$W_{n,q}(x) \approx W_n(x), \quad \| W_{n,q}(x) - W_n(x) \|_{C\text{^}2_[0,\,1]} \le |\tau(n, q)|$$

и один отличный от нуля коэффициент дополнительного многочлена $\tau(n, q)$. Этот коэффициент убывает к нулю (с ростом параметра q)

$$\tau(n, q) \mid = o(u^{q-n}), \quad u < 0.1.$$

Поведение коэффициента $\tau(n, q)$ хорошо иллюстрируют его значения

$$\{ \tau(2j, 10) \}_{j=0}^{6} = \{ 2\ 10^{-16}, 3\ 10^{-15}, 8\ 10^{-13}, 4\ 10^{-10}, 3\ 10^{-7}, 5\ 10^{-4}, 1 \}.$$

Из этих тождеств можно сделать следующее заключение.

Вывод 8. *В случае задачи* (22), *отрезка* [0, 1] *и параметра n*:

– *по алгоритму* 2 [3] *с параметром q вычисляют аппроксимацию*

$$\| W_{2[n/2]+2,\,q}(x) \|_{C^2_[0,\,1]} \mid \tau(n, s), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

оценки (24) *погрешности алгоритма* 1 *и погрешность этой аппроксимации не больше*

$$\mid \| W_{2[n/2]+2}(x) \|_{C^2_[0,1]} - \| W_{2[n/2]+2,\,q}(x) \|_{C^2_[0,1]} \mid \mid \tau(n, s) \mid \le$$

$$\mid \tau(n, s) \mid \mid \tau(2[n/2] + 2, q) \mid = \mid \tau(n, s) \mid o(u^{q-2[n/2]-2}) = o(u^{q-2[n/2]-2}), \quad u < 0.1,$$

– *по алгоритму* 3 [3] *с параметром q вычисляют аппроксимацию*

$$\| W''_{2[n/2]+2,\,q}(x) \|_{C[0,1]}\ 1/a_{2[n/2]+2}(W''_{2[n/2]+2,\,q}(x),[0,1]),$$

оценки (24) *коэффициента оптимальности алгоритма 1 и погрешность этой аппроксимации имеет порядок*

$$O(\mid \tau(2[n/2]+2, q) \mid) = O(u^{q-2[n/2]}), \quad u < 0.1.$$

10. Программирование алгоритма 1 в APS

Структура данных на входе.

1. Уравнение (1) определяют его правая и левая части – функция $f(y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ и линейный дифференциальный оператор с многочленными коэффициентами $D[\,y\,]$.

2. Оператор $D[\,y\,]$ имеет вид `A * dif( y, k ) + ... + C * y + G`, где `y` – атом, многочлены `A, ..., C, G` являются термами, имеют вид, естественный для математики и аргумент – атом `x`.

3. Функция $f(x, y, y', \ldots, y^{(k-1)})$ имеет вид, обычный для СКА, и аргументы – атомы

`x, y, y1, y2, ..., ys,` $s = k - 1$.

4. Условия (2) имеют вид (...,(x = d_i, Ai*dif(y,k_i)+ ... +Ci*y+Gi = 0),...).

5. Отрезок аппроксимации $[a, b]$ определяет список (a, b).

6. Параметр n алгоритма является целым числом.

Структура данных на выходе. Многочлен y_n (3) имеет коэффициенты – числа и вид, естественный для математики, `d + ... + f * x^n`.

APLAN-процедура. Алгебраическая спецификация п. 2 алгоритма 1.

```
y1_n := d_x(y_n);                                /*  y'_n  */
y2_n := d_x(y1_n);                               /*  y"_n  */
....
fy_n := subs((y=y_n, y1=y1_n,...), fy)); /* f(x,y_n,...) */
F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n);  /* U_n[fy_n] */
LDUMK := ( Dy + (-1) * F_s  = 0 );
```

APLAN-процедура – реализация алгоритма [3].

Структура выхода операторов APLAN-процедуры.

Процедура вычисляет начальное приближение $y_{n,0}$ (4) – многочлен с числовыми коэффициентами вида, естественного для математики.

На каждой итерации (s) процедура вычисляет:
– производные многочлена $y_{n,s\text{-}1}$ вида, естественного для математики,
– функцию $f_s = f(x, y, y', \ldots, y^{(k\text{-}1)}) |_{y=y_\{n,s\text{-}1\}}$ естественного вида,
– многочлен $F_s = U_n[f_s]$ естественного вида,
– ЛДУМК (7) вида [3] `A*dif(y, k) + ... + C * y + -1 * F_s = 0`,
– следующее приближение $y_{n,s}$ к решению исходной краевой задачи (1), (2) – многочлен с числовыми коэффициентами вида, естественного для математики.

11. Исследование APLAN-процедуры

Теорема 2. *Сложность выполнения одной итерации алгоритма* 1 APLAN-*процедурой с ростом параметра n возрастает как полином*

$$(m+1)\ Q(\ canplf, m\ ) + O(\ n^3\ ),\quad m = \max\ \{\ \deg(\ D[\ y_n \in P_n\ ]\ ), n\ \} + k = n + O(1),$$

где $Q(\ canplf, m\ )$ *– сложность преобразования оператором* `canplf` *многочлена порядка m к каноническому виду – сумме мономов вида* `c(i)*x^j$b`, $i, j = 0, \ldots, m$.

Доказательство. Процедура вычисления одной итерации решения линейная. Поэтому вычислительная сложность этой процедуры тождественна сумме вычислительной сложности операторов этой процедуры. Вычислительная сложность APLAN-процедуры, реализующей алгоритм [3], оценена в работе [3]. Остальные операторы процедуры имеют по параметру n полиномиальную сложность $O(n^s)$, $s \le 3$.

12. Вычислительный эксперимент с процедурой

Описание краевой задачи (21) на языке APLAN.

```
process[1] := (                     Dy := dif(y , 2) + -1 * y;
                                         fy := exp(y) + -1 * y;
           Cond := ( ( x = 0 , y = 0 ) , ( x = 1 , y = 0 ) );
                              interval := (0 , 1) ;      ...);
```

Результаты решения задачи (21) процедурой ($n = 2$).

```
  fy_n := subs((y = y_n, y1 = y1_n,...), fy)) = 1;
  F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) = 1;
  LDUMK := ( Dy + -1 * F_s  = 0 ) =
                              (dif (y , 2) + -1 * y + -1 = 0);
 ... y_n := ser(n,Coef) = 0.470588 * x ^ 2 + -0.470588 * x ;
  F_s := Cheb_interpol(fy_n , interval , n) =
                       -0.0266273 * x ^ 2 + 0.0266273 * x + 1 ;
  LDUMK := ( Dy + -1 * F_s = 0 ) =    (dif (y , 2) + -1 * y +
               0.0266273 * x ^ 2 + -0.0266273 * x + -1 = 0);
  ... y_n := ser(n,Coef) = 0.472155 * x ^ 2 + -0.472155 * x ;
  ... y_n := ser(n,Coef) = 0.472165 * x ^ 2 + -0.472165 * x ;
```

13. Программирование алгоритма 1 в СКА

Построенная выше APLAN-процедура доказывает – алгоритм 1 имеет алгебраические преобразования и его можно реализовать в других СКА. Результаты исследования этой процедуры доказывают эффективность такой реализации.

14. Решение практической задачи – задачи Прагера

Задача о деформации упругой струны под действием поперечной нагрузки. Конечные деформации упругой струны под действием поперечной нагрузки хорошо моделирует краевая задача

$$y'' = 1 + a^2 (y')^2, \quad y(0) = 0\ , \quad y(1) = 0. \qquad (25)$$

Эту задачу предложил В. Прагер для оценки эффективности метода квазилинеаризации [4, с. 43]. Задача (25) имеет единственное решение – функцию, аналитическую в окрестности отрезка [0,1] комплексной плоскости

$$y = 1/a^2 \ln(\cos(a\,(x\text{-}1/2)) / \cos(a/2)). \qquad (26)$$

Свойства функции y (26). Отличные от нуля коэффициенты Фурье – Чебышева функции y (26) и функции y'' на отрезке [0,1] только четные. В случае параметра $a = 0{,}7$ они принимают следующие значения

$$\{ a_{2\,i}(y\ , [0,1]) \}_{i=0}^{9} = \{ 0.064\ ,\ -0.064\ ,\ -0.00034\ ,\ -2.8\ 10^{-6}\ ,\ -2.7\ 10^{-8}\ ,$$
$$-2.7\ 10^{-10}\ ,\ -2.9\ 10^{-12}\ ,\ -3.2\ 10^{-14}\ ,\ -4.6\ 10\text{-}16\ ,\ 6.2\ 10^{-18} \}\ ,$$
$$\{ a2\ i(y''\ , [0,1]) \}_{i=0}^{10} = \{ -1.1\ ,\ -0.067\ ,\ -0.0014\ ,\ 2.5\ 10^{-5}\ ,\ -4\ 10^{-7}\ ,$$
$$-6.3\ 10^{-9}\ ,\ -9.5\ 10^{-11}\ ,\ -1.4\ 10^{-12}\ ,\ 2\ 10^{-14}\ ,\ -2.6\ 10^{-16}\ ,\ 4.4\ 10^{-17} \}. \qquad (27)$$

С возрастанием параметра $n = 2\ i$ они регулярно убывают к нулю, аналогично функции (10). Следовательно, для величины наилучшего приближения функции y (26) с параметром $a = 0.7$ алгебраическими многочленами порядка n в пространстве $C_{[0,1]}$ и в пространстве $C^2_{[0,1]}$ справедливы аналоги тождеств (12).

Вычислительный эксперимент с алгоритмом 1. Норма в пространстве $C_{[0,1]}$ и $C^2_{[0,1]}$ погрешности решения по алгоритму 1 задачи (25) с параметром $a = 0{,}7$ удовлетворяет тождества

$$\{ \|\ y - y_{2\,i}\ \|C_{[0,1]} \}_{i=1}^{5} = \{ 0.006\ ,\ 3.7\ 10^{-5}\ ,\ 1.8\ 10^{-7}\ ,\ 1.8\ 10\text{-}9\ ,\ 4.8\ 10^{-11} \}\ ,$$
$$\{ \|\ y - y_{2\,i}\ \|_{C\text{^}2_[0,1]} \}_{i=1}^{5} = \{ 0.07\ ,\ 0.0014\ ,\ 2.5\ 10^{-5}\ ,\ 4.1\ 10^{-7}\ ,\ 10^{-8} \}. \qquad (28)$$

Из тождеств (27) и (28) можно сделать следующее заключение.

Вывод 9. *Главной частью коэффициента оптимальности решения по алгоритму* 1 *краевой задачи* (25) *в пространствах* $C_{[0,1]}$ и $C^2_{[0,1]}$ *являются отношения*

$$\|\ y - y_n\ \|_{C[0,1]} / |\ a_{2\,[n/2]+2}(y\ , [0,1])\ | = C_{2\,[n/2]}, \quad \{C_{2\,\mathrm{i}}\}_{i=1}^{5} = \{ 18, 13, 6.(6), 6.(6), 6.2 \},$$
$$\|y - y_n\|_{C\text{^}2[0,1]}/|a_{2\,[n/2]}(y'', [0,1])| = 1 + \alpha_{2\,[n/2]}, \quad \{\alpha_{2\,i}\}_{i=1}^{4} = \{ 0.05, 0.009, 0.004, 0.002 \}. \ (29)$$

Согласно определению, коэффициент оптимальности метода вычисления алгебраического многочлена, аппроксимирующего решение краевой задачи (1), (2), не меньше единицы. Поэтому, из этих тождеств и тождества (12) можно сделать следующее заключение.

Вывод 10. *Главная часть коэффициента оптимальности решения по алгоритму* 1 *краевой задачи* (25) *с параметром* $a = 0.7$:

– в пространстве $C_{[0,1]}$ *ограничена и справедливо тождество*

$$C_n(\ algorithm_1,\ (25),\ a = 0.7,\ C_{[0,1]}\ ) = (1 + \beta_n)\ C_{2\,[n/2]},\ n > 1\ |\ \beta_n\ | \le \beta \approx 0.015,$$

– в пространстве $C^2_{[0,1]}$ *асимптотически тождественна минимальному значению коэффициента оптимальности и справедливо тождество*

$$C_n(\ algorithm_1,\ (36),\ a = 0{,}7,\ C^2_{[0,1]}) = (1 + \gamma_n)\ (1 + \alpha_{2\,[n/2]}),\ n > 2 \rightarrow |\ \gamma_n\ | \le \gamma \approx 0.015.$$

Сравнение алгоритма 1 и метода квазилинеаризации на задаче Прагера. На краевой задаче (25) с параметром $a = 0.7$, согласно [4, с. 42], метод квазилинеаризации имеет погрешность $3\ 10^{-6}$. Поэтому из тождеств (27) – (29) можно сделать следующее заключение.

Вывод 11. *На краевой задаче* (25) ($a = 0.7$) *главная часть коэффициента оптимальности метода алгебраической интерполяции сеточного решения метода квазилинеаризации* (14) ($q = 10$) *более чем в* 1 000 000 *раз больше* $1 + \alpha_{2\,[n/2]}$ (29) – *главной части коэффициента оптимальности алгоритма* 1 *на этой задаче*

$$C_{10}(P_{10}[\ y_h\ ],\ task\ (25),\ a = 0.7,\ C_{[0,1]}) \ge 3\ 10^{-6} / 2.9\ 10^{-12} > 10^6.$$

Заключение

Построенный в работе алгоритм 1 имеет только алгебраические преобразования и решает весь класс краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка k вида (1), (2) с коэффициентами линейного оператора $D[\,y\,]$ (1) – многочленами и достаточно широким классом функций $f(\,x, y, y',\ldots, y^{(k-1)}\,)$. По этому алгоритму в СКА вычисляют алгебраический многочлен y_n порядка $n \in N$ – аппроксимацию решения $y = y(x)$, $x \in [a,\, b]$, исходной краевой задачи (1), (2). Эта аппроксимация оптимальна для символьных преобразований функции $y(x)$, $x \in [a,b]$ и её производных $y', \ldots, y^{(k)}$ – в пространстве $C^k_{[a,b]}$ ограничен коэффициент оптимальности алгоритма 1. Следовательно, на краевой задаче (1), (2) алгоритм 1 реализует идею К. Ланцоша. *На основании τ-метода построить эффективные алгоритмы для вычисления алгебраических многочленов – аппроксимации решения функциональных уравнений отдельных типов.*

Дополнение

1. **Алгоритм 1'.** Модификация алгоритма 1. Алгоритм 1 [3] заменен алгоритмом 1' [3]. Это алгоритм τ-метода с базисом пространства $H_{[a,\,b]}$.

2. Для алгоритма 1' имеют место аналог теоремы 1 и аналоги применения теорем [3]. В аналогах пространство $L_2(a,b;\,\rho)$ заменено пространством $H_{[a,\,b]}$.

3. **Модификация APLAN-процедуры.** Процедура – реализация алгоритма 1 [3] – заменена процедурой – реализацией алгоритма 1' [3]. Она реализует алгоритм 1'.

4. Оценка погрешности алгоритма 1 в комплексной плоскости следует из тождеств теорем [3].

5. Оценка погрешности алгоритма 1' в комплексной плоскости следует из тождеств аналогов теорем [3].

Литература

1. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа / Ланцош К. – М. : ФМ., 1957. – 584 с.
2. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева / Пашковский С. – М. : Наука, 1983. – 384 с.
3. Денисенко П.Н. Алгоритм решения краевых задач в системах компьютерной алгебры по τ-методу Ланцоша / П.Н. Денисенко // Искусственный интеллект. – 2008. – № 1. – С. 38-48.
4. Беллман Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи / Р. Беллман, Р. Калаба. – М. : Мир, 1968. – 183 с.
5. Красносельский М.А. Приближенное решение операторных уравнений / Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. – М. : Наука, 1969. – 456 с.

П.М. Денисенко

Алгоритм для розв'язування нелінійних крайових задач за τ-методом Ланцоша в системах комп'ютерної алгебри

Побудовано алгебраїчний алгоритм для перетворення багатоточкової лінійної крайової задачі для диференціального рівняння порядку k з лінійною частиною – лінійний диференціальний оператор з коефіцієнтами – многочленами та нелінійною – функція $f(\,y, y',\ldots, y^{(k-1)}\,)$ на алгебраїчний многочлен порядку $n \in N$. Цей многочлен – апроксимація розв'язку $y(x)$, $x \in [a,b]$ оригінальної крайової задачі. Ця апроксимація оптимальна в просторі $C^k_{[a,b]}$.

P.N. Denisenko

Solving the Nonlinear Boundary-Value Problem Using the Lanczos τ-Method in the Computer Algebra Systems

We constructed the algebraic algorithm for transforming the nonlinear boundary-value problem into the algebraic polynomial of order $n \in N$. This polynomial is the solution $y(x)$, $x \in [a,b]$ approximation for the problem. This approximation is optimal in the space $C^k_{[a,b]}$.

Статья поступила в редакцию 16.06.2009.